Equazioni di Maxwell

venerdì 2 febbraio 2024 23:14

1ª EQUAZIONE DI MAXWELL

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

DIM

- Useremo il teorema di Gauss

$$\phi_S(E) = \int_S E \hat{n}\, ds = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Passando dal caso discreto al caso continuo risulta che

$$\sum q_{int} = \int_V \rho\, dV$$

Allora

$$\int_S E \hat{n}\, ds = \int_V \frac{\rho\, dV}{\varepsilon_0}$$

Per il TEO della Divergenza:

$$\int_S E \hat{n}\, ds = \int_V \nabla E\, dV$$

Allora

$$\int_V \nabla E\, dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV$$

$\Rightarrow$

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

3° Equazione di Maxwell

$$\nabla \wedge B = \mu_0 J' = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

DIM

- Useremo la 1° eq di Maxwell, il Teorema di Ampere, il Teorema di Stokes e l'equazione di continuità

Dal teorema di Stokes risulta che:

$$\int_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \wedge B)\,\hat{n}\, ds$$

Inoltre

$$\int_\gamma \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum i_{conc} = \mu_0 \int_S \vec{J}\,\hat{n}\, ds$$

$\Rightarrow$

$$\int_S \mu_0 \vec{J}\,\hat{n}\, ds = \int_S (\nabla \wedge B)\,\hat{n}\, ds$$

$\Rightarrow$

$$\nabla \wedge B = \mu_0 \vec{J}$$

Se inoltre valgono:

1) $\nabla J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

2) $\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow$

$$\nabla J = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot E \, \varepsilon_0$$

$\Rightarrow$

$$\nabla J + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla E = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \underbrace{\left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)}_{= J'} = 0$$

Dunque

$$\nabla \wedge B = \mu_0 J' = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$\blacksquare$

4° Equazione di Maxwell

4° Equazione di Maxwell

$$\nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

DIM

- Useremo Faraday-Lenz, Stokes

$$\xi = -\frac{d\,\phi_S(B)}{dt}$$

inoltre

$$\xi = \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Allora

$$\int_\gamma E\, dl = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\,\hat{n}\, ds$$

$\Rightarrow$

$$\int_S \nabla \wedge E\,\hat{n}\, ds = -\int \frac{\partial B}{\partial t}\,\hat{n}\, ds$$

$\Rightarrow$ $\int \left(\nabla \wedge E + \frac{\partial B}{\partial t}\right)\hat{n}\, ds = 0$

$$\Rightarrow \int_S \left(\nabla \wedge E + \frac{\partial B}{\partial t}\right) \hat{n}\, ds = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

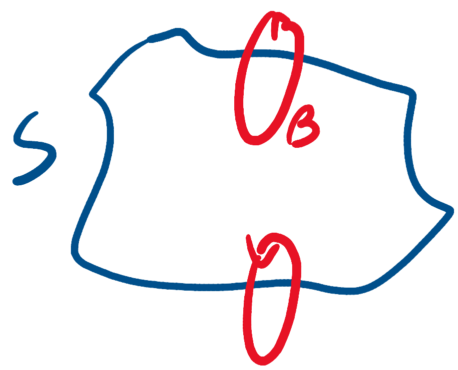
$\blacksquare$

2ª Equazione di Maxwell

$$\nabla B = 0$$

DIM

Presa una superficie S chiusa, risulta che le linee di campo magnetico sono chiuse



Dunque $\int_S \vec{B}\, \hat{n}\, ds = 0$

$\Rightarrow$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot B \, dV = 0$$

$\blacksquare$